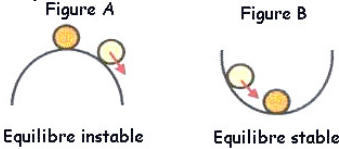


Oscillateurs Mécaniques : Pendule Elastique



Oscillateur mécanique : Tout mobile qui effectue un mouvement de va et viens autours de sa position d'équilibre stable



Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

- **La figure A :** elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B :** elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.

I. Pendule Elastique

Un pendule élastique, ou **système solide-ressort**, est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

1. La Tension de ressort

$$T = K \cdot \Delta \ell$$

Tension du ressort (N)

$$\Delta \ell = \ell - \ell_0$$

Allongement du ressort (m)

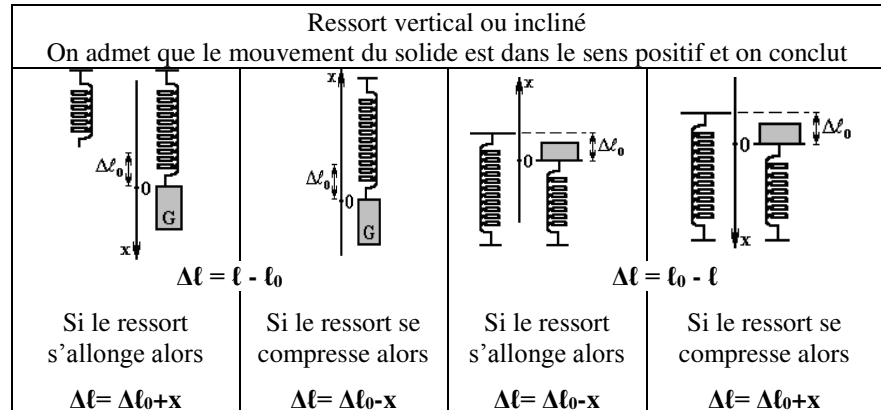
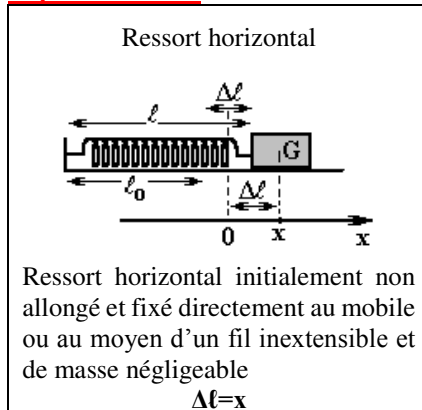
$$\ell_0$$

Longueur initiale ℓ_0 (m)

$$K$$

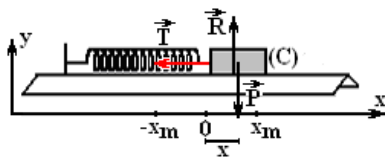
Raideur du ressort (N/m)

Expression de $\Delta \ell$



2. Equation différentielle :

Un solide, de masse m sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K ,



Système : Solide (C)

Bilan des forces :

- $\vec{T}$: Tension du ressort
- $\vec{R}$: Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$: Poids du corps (C)

En appliquant la 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{T} \begin{pmatrix} T_x = -T \\ T_y = 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P} \begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P = -m \cdot g \end{pmatrix} \text{ et } \vec{R} \begin{pmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_G \begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$$

Sur l'axe Ox : $T_x + R_x + P_x = m \cdot a_x$

$$-T = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot \Delta \ell = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot x = m \cdot \ddot{x} \text{ d'où } -\frac{K}{m} \cdot x = \ddot{x}$$

donc $\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$: Equation différentielle de mouvement du centre d'inertie G

L'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ ou bien $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (en rad/s)

3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

ou bien

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

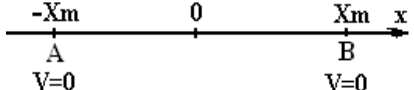
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

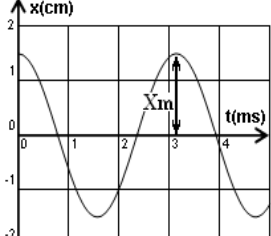
avec

$x(t)$: l'abscise (élongation) du point G et varie entre X_m et $-X_m$
 X_m : Amplitude ou élongation maximale
 ω_0 : pulsation (rad/s)
 T_0 : la période (s)
 $\omega_0 \cdot t + \varphi$: Phase à l'instant t
 φ : Phase à l'origine des temps $t=0$

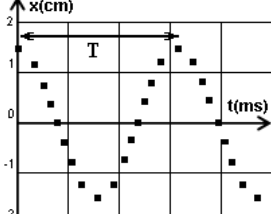
Déterminer les constantes X_m , T_0 et φ :

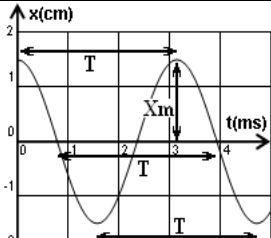
Comment déterminer X_m

1. <u>Phrase</u>	 - On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale $X_m = 2\text{cm}$ - Le corps oscille entre deux points A et B distante de $AB = 4\text{cm}$ $X_m = 2\text{cm}$ d'où $AB = 2.X_m = 4\text{cm}$
------------------	--

2. <u>Graphiquement</u>	2.1. <u>Par rapport à l'axe temps</u>  $X_m = 1.5\text{cm}$
-------------------------	--

Comment déterminer la période propre T_0

3. <u>Enregistrement</u>	 τ : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs $T = 16.\tau$
--------------------------	---

4. <u>Graphiquement $x=f(t)$</u>	 Attention à la lecture et à l'échelle $T_0 = 3.2\text{ms}$
---	---

Comment déterminer la phase à l'origine φ

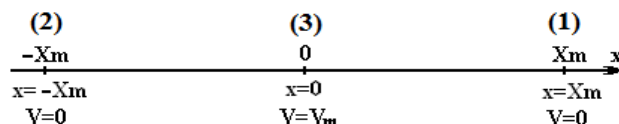
$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$: l'équation horaire $V_x = \dot{x}(t) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$

l'expression de la composante du vecteur vitesse V_x et $\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$ sont opposées (ont des signes différents)

$x_0 = x(0) = X_m \cdot \cos(\varphi)$ d'où $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m}$ à l'instant $t=0$ $V_{0x} = V(0) = \dot{x}(0) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\varphi)$

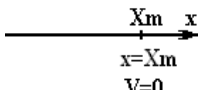
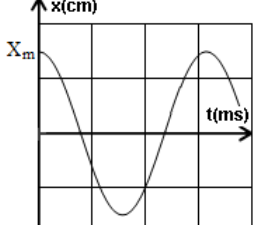
V_x à l'instant $t=0$ et $\sin(\varphi)$ sont opposées (ont des signes différents) On en conclut que V_x à l'instant $t=0$ et φ sont opposées aussi

En comparant le sens de mouvement avec le sens positif de l'axe, on détermine le signe de V_x la composante de la vitesse et on en déduit le signe de la phase φ



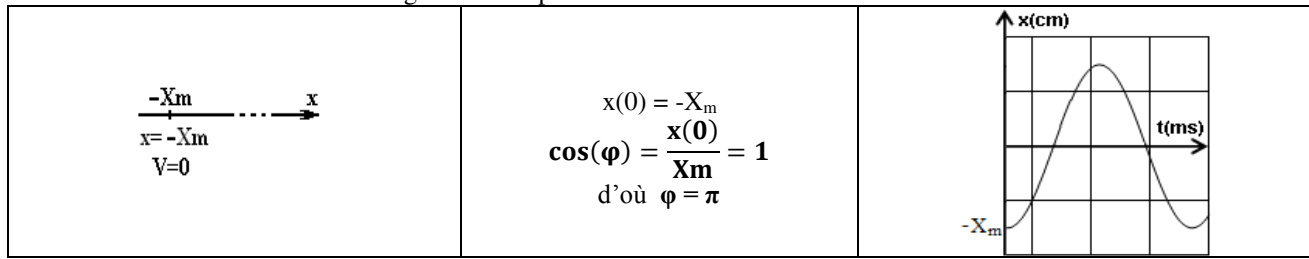
1^{er} cas :

(1) On écarte le corps, dans le sens positif, de X_m de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

	$x(0) = X_m$ $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m} = 1$ d'où $\varphi = 0$	
---	--	---

2^{em} cas :

- (2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de X_m de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



4. Expression de la période propre T_0 :

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) : \text{l'équation horaire}$$

On dérive deux fois par rapport au temps t :

$$\dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \ddot{x} = -x_m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x \quad \ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x = 0$$

On compare cette expression avec l'équation différentielle, on déduit que pour que soit une solution de l'équation différentielle,

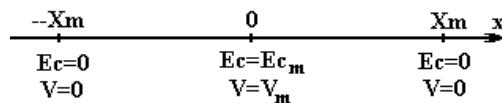
$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \text{il suffit que} \quad \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m} \quad \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

I. Etude Energétique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

1. Energie cinétique :

$$x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad V_x = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad E_c = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$



- Si $x = X_m$ ou $x = -X_m$ alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si $x = 0$ alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle :

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

❖ Energie potentielle élastique E_{pe}

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $E_{pe}=0$

Si le pendule élastique est horizontal alors $\Delta \ell = x$ alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C$$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique

$x=0$ et $E_{pe}=0$ d'où $C=0$ alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

❖ Energie potentielle de pesanteur E_{pp}

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $E_{pp}=0$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique $z=0$ et $E_{pp}=0$ d'où $C=0$ alors

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z$$

NB :

Pour un pendule élastique horizontal $E_{pp}=0$

$$\text{Conclusion : } E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

$$\text{On a } x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ alors } E_p = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

3. Expression de la variation de l'énergie potentielle :

ΔE_{pe} : Variation de l'énergie potentielle élastique

$$\Delta E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_2^2 - \Delta \ell_1^2) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{T})$$

ΔE_{pp} : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur

$$\Delta E_{pp} = m \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{P})$$

4. Energie mécanique :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C \quad \text{Pour les conditions décrites avant on peut écrire} \quad E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

5. Le cas du pendule élastique incliné ou vertical

X : la distance que parcourt le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et

$$Z = -X \cdot \sin(\alpha)$$

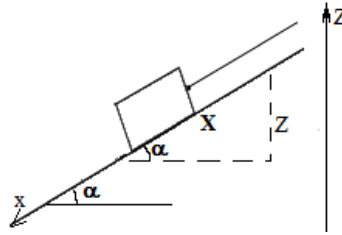
NB : si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle varie

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = -m \cdot g \cdot Z + C$$

- La relation entre abscisse varie aussi

$$Z = X \cdot \sin(\alpha)$$



$$1. \quad E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z + C$$

- Déterminer l'expression de la constante C

- Déterminer le plan horizontal référentielle de l'énergie potentielle $E_{p_p}=0$

- Déterminer l'abscisse correspondant Z_0

$$Z = Z_0 \text{ et } E_{p_p}(Z_0) = 0$$

D'où

$$E_{p_p}(Z_0) = m \cdot g \cdot Z_0 + C = 0$$

donc

$$C = -m \cdot g \cdot Z_0$$

- On remplace C par son équivalent et on obtient alors

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z - m \cdot g \cdot Z_0$$

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot (Z - Z_0)$$

Energie potentielle élastique

$$1. \quad E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

Déterminer l'expression de $\Delta \ell$ en fonction de x soit $\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x$

- Déterminer la constante C

- Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle $E_{p_e}=0$

- Déterminer l'abscisse correspondant x_0

$$x = x_0 \text{ et } E_{p_e}(x_0) = 0$$

$$\text{D'où } E_{p_e}(x_0) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C = 0$$

$$\text{Donc } C = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2$$

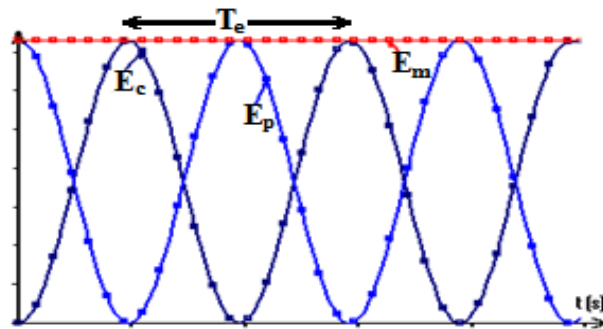
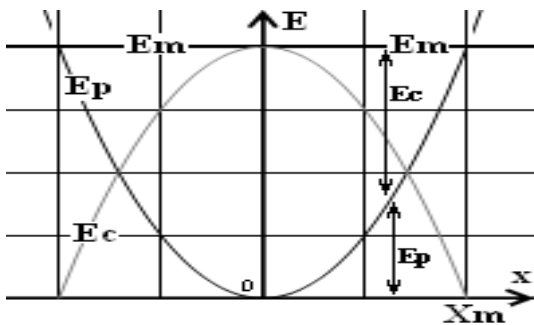
- Remplacer dans l'expression de E_{p_e}

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C$$

6. Les graphes d'énergies :

- Au point $x=X_m$ on a $E_m=E_{p_{\max}}$

- Au passage par la position d'équilibre $x=0$ on a $E_m=E_{c_{\max}}$



$T_0 = 2 \cdot T_e$: La période des oscillations T_0 est le double de la période des énergies T_e

NB :

S'il existe frottement alors l'amplitude des oscillations diminue par dissipation (perte) de l'énergie mécanique au cours du temps

